



УДК 534.2:532

# ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛЬНОГО СЖАТИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ В ЖИДКОСТИ<sup>1</sup>

*А. А. Аганин, Т. Ф. Халитова, Н. А. Хисматуллина*

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

**Аннотация.** Предлагается методика расчета сильного сжатия осесимметричного газового пузырька в жидкости методом прямого численного моделирования на основе уравнений динамики жидкости и газа. Эта методика использует схему второго порядка точности по пространству и времени в области гладких решений. Приводятся результаты численного исследования экономичности данной методики. Установлено, что она намного эффективнее широко известной в литературе классической схемы Годунова первого порядка аппроксимации.

**Ключевые слова:** уравнения газовой динамики, ENO, TVD, схема Годунова

---

## 1 Введение

При изучении эволюции возмущений сферической формы пузырька широко используются приближенные модели, в которых динамика жидкости и газа представляется как суперпозиция чисто радиального движения и его малого несферического возмущения [1]. Такой подход значительно упрощает математические выкладки и он эффективен в смысле затрат компьютерного времени. Однако точность и область применимости таких моделей ограничены предположениями о характере движения и распределении параметров задачи.

В настоящей работе предлагается методика расчета сильного сжатия осесимметричного газового пузырька в жидкости методом прямого численного моделирования на основе уравнений динамики жидкости и газа.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00415-а) и в рамках программы ОЭМПУ РАН

Такой подход является более общим, однако требует значительных временных затрат. В связи с этим в данной работе представлены результаты численного исследования экономичности методики на примере тестовой задачи свободных колебаний полости в жидкости. Для иллюстрации правильности описания сферического и несферического движения поверхности, а также их взаимодействия приводятся результаты расчета задачи динамики газовой полости в слое жидкости.

## 2 Математическая модель

В настоящей работе применяются уравнения динамики газа и сжимаемой жидкости без учета вязкости, теплопроводности и испарения–конденсации в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0, \quad \rho \frac{dE}{dt} + \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = 0,$$

с уравнениями состояния вида  $p = p(\rho, T)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ . Здесь  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{u}$  — вектор скорости частицы среды;  $p$  — давление;  $E$  — удельная полная энергия;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $T$  — температура.

Граничные условия на поверхности пузырька  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$  имеют вид:

$$\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}^0 = \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}^0 = \mathbf{D}, \quad p^+ = p^- + 2H\sigma,$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки пространства;  $\mathbf{D} = \partial \mathbf{r}_s / \partial t = D\mathbf{n}^0$  — скорость элемента поверхности пузырька;  $\mathbf{n}^0$  — внешняя единичная нормаль;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $2H$  — средняя кривизна поверхности, знак плюс в качестве верхнего индекса указывает, что значение параметра относится к стороне жидкости, а знак минус — к стороне газа.

В зависимости от моделируемой задачи на внешней границе  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\infty$  задается эволюция внешнего давления или эволюция нормальной компоненты скорости.

Поверхность пузырька в процессе сжатия может претерпевать значительные искажения, поэтому в предлагаемой методике используется смешанная эйлерово-лагранжева (СЭЛ) система координат  $(\xi, \eta)$ , связанная с поверхностью пузырька. Связь между эйлеровыми и СЭЛ координатами имеет вид:  $x = x(\xi, \eta, \tau)$ ,  $y = y(\xi, \eta, \tau)$ ,  $t = \tau$ .

Уравнения газовой динамики в дивергентной форме в СЭЛ координатах:

$$\mathbf{Q}_\tau + \mathbf{F}_\xi + \mathbf{G}_\eta = \mathbf{S},$$

где

$$\mathbf{Q} = \sqrt{|h|}\mathbf{q}, \quad \mathbf{F} = \sqrt{|h|}\mathbf{f}, \quad \mathbf{G} = \sqrt{|h|}\mathbf{g}, \quad \mathbf{S} = \sqrt{|h|}\mathbf{s};$$

$$\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T,$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho(U - U_w) \\ \rho u(U - U_w) + p\xi_x \\ \rho v(U - U_w) + px^{-\beta}\xi_y \\ \rho E(U - U_w) + pU \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho(V - V_w) \\ \rho u(V - V_w) + p\eta_x \\ \rho v(V - V_w) + px^{-\beta}\eta_y \\ \rho E(V - V_w) + pV \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha p}{x} + \beta \left[ \rho v \left( \frac{v}{x} - y_\tau \right) \right] \\ \beta \left[ -\frac{\rho}{x} (uv - uxy_\tau - vx_\tau) + \frac{p}{x} \operatorname{ctg} y \right] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $U = u\xi_x + \frac{v}{x^\beta}\xi_y$ ;  $V = u\eta_x + \frac{v}{x^\beta}\eta_y$ ;  $U_w = u_w\xi_x + \frac{v_w}{x^\beta}\xi_y$ ;  $V_w = u_w\eta_x + \frac{v_w}{x^\beta}\eta_y$ ;  $u_w = x_\tau$ ;  $v_w = y_\tau x^\beta$ ;  $\sqrt{|h|} = J\sqrt{|g|}$ ;  $|g| = x^{2\alpha} \sin^{2\beta} y$ ;  $J = x\xi_y\eta - x\eta y\xi$ ;  $E = \varepsilon + (u^2 + v^2)/2$ ;  $\beta = \alpha(\alpha - 1)/2$ ,  $\alpha = 1, 2$  для цилиндрической ( $x = r, y = -z$ ) и сферической ( $x = r, y = \theta$ ) систем отсчета соответственно;  $u, v$  — компоненты вектора скорости частицы среды;  $u_w, v_w$  — компоненты вектора скорости СЭЛ координат.

Граничные условия на поверхности пузырька имеют вид:

$$U^{o+} = U^{o-} = D, \quad p^+ = p^- + 2H\sigma,$$

где  $U^o = U/\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 x^{-2\beta}}$ .

В начальный момент времени уравнение поверхности пузырька  $r = r_s$  в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$  представляется следующим образом:

$$r_s^0 = R^0 + a_i^0 P_i(\cos \theta).$$

Здесь  $R^0$  — начальный средний радиус пузырька;  $P_i$  — полином Лежандра степени  $i > 1$ . Параметр  $a_i^0$  определяет величину начального отклонения поверхности от сферы в виде  $P_i$ , а в произвольный момент времени он вычисляется по формуле

$$a_i(t) = \frac{2i+1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r_s(\theta, t) P_i(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Начальное распределение неизвестных параметров определяется из упрощенной модели с расщеплением на сферическую составляющую и ее малого несферического возмущения.

### 3 Методика расчета

При сильных сжатиях пузырька могут возникать ударные волны, поэтому в качестве метода численного решения уравнений динамики газа и жид-

кости принят широко используемый в литературе метод Годунова для подвижной системы координат [2]. В своем классическом варианте метод Годунова имеет первый порядок аппроксимации. Для решения одномерных задач динамики пузырька довольно успешно применяются схемы первого порядка [3]. В настоящей работе показано, что такой подход для решения двумерных задач динамики пузырька оказывается практически неприемлемым в силу больших затрат компьютерного времени. Поэтому произведена модификация метода Годунова на основе хорошо зарекомендовавших себя разностных схем типа TVD и ENO второго порядка аппроксимации. При применении TVD-схем, не увеличивающих полную вариацию, снижается порядок аппроксимации в ряде особых точек, а ENO-схемы [4] обеспечивают второй порядок аппроксимации всюду, но теряют свойство TVD. Вместе с тем потеря свойства TVD в ENO-схемах происходит лишь на уровне погрешности аппроксимации, что обычно является вполне приемлемым. В работе показано, что для рассматриваемых задач динамики пузырька применение ENO-схемы оказывается более предпочтительным.

#### 4 Результаты расчетов

Для демонстрации эффективности предлагаемой методики решена задача свободных колебаний эллипсоидальной полости в жидкости. Исходные данные:  $R^0 = 1$  мкм,  $r_\infty^0 = 5R^0$ ,  $a_2^0 = 0.00066R^0$ ,  $\sigma = 7.3$  Н/м,  $p^0 = 1$  бар,  $\rho^0 = 858$  кг/м<sup>3</sup>. Результаты представлены на Рис. 1. Расчетная область равномерно разбивается на  $N_r \times N_\theta$  ячеек, где  $N_r$  — число ячеек по радиусу, а  $N_\theta$  — по углу. Видно, что применение ENO-схемы (Рис. 1(b)) позволяет добиться сходимости к точному решению для несжимаемой жидкости (сплошная линия) уже на сетке  $500 \times 250$ , а классическая схема Годунова (Рис. 1(a)) требует дальнейших расчетов, что приводит к существенному росту затрат компьютерного времени.

Для иллюстрации правильности описания сферического и несферического движения поверхности пузырька, а также их взаимодействия рассматривается задача динамики эллипсоидальной полости в слое жидкости с начальным отклонением  $a_2^0 = 0.005R^0$ . Если внешнюю границу двигать по гармоническому закону  $r_\infty = r_\infty^0 + A \sin \omega t$ , где  $r_\infty^0 = 2R^0$ ;  $A = 0.01$  мкм;  $\omega/2\pi = 3$  МГц, а на внутренней как и раньше учитывать поверхностное натяжение, то кроме несферических колебаний, можно наблюдать и радиальное движение поверхности полости. На Рис. 2 представлены результаты расчетов для сжимаемой и несжимаемой жидкости в случае подвижной внешней границы и несжимаемой жидкостей с неподвижной внешней границей. Видно, что в первом случае кривые совпадают с удовлетворительной точностью, а кривая, соответствующая случаю неподвижной внешней границы, отклоняется от них. Таким образом, методика, основанная на

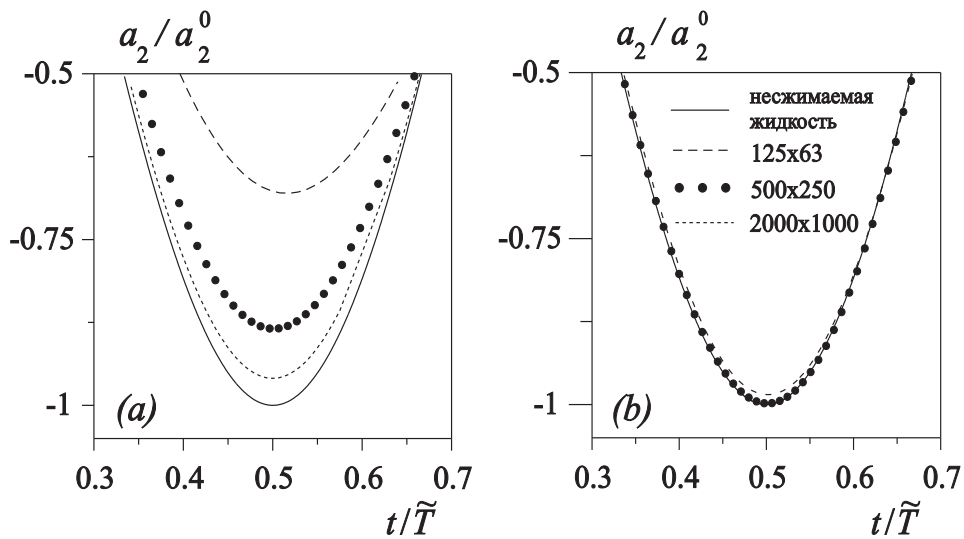


Рис. 1. Зависимость относительного отклонения от относительного времени в задаче свободных колебаний полости в жидкости при использовании а) классической схемы Годунова и б) ENO-модификации схемы Годунова на различных сетках,  $\tilde{T}$  — период колебаний несжимаемой жидкости

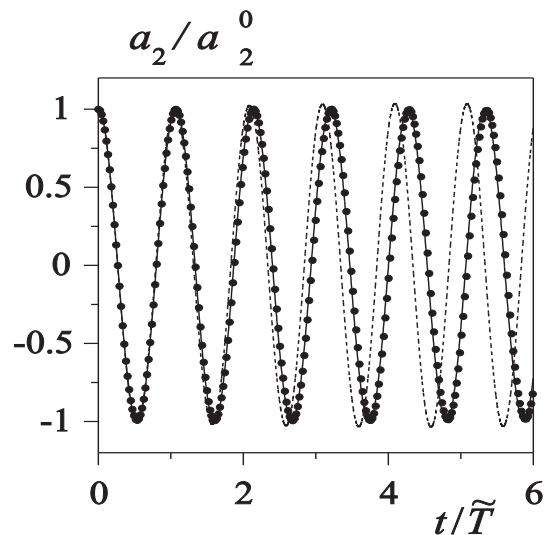


Рис. 2. Зависимость относительного отклонения от относительного времени в задаче динамики полости в слое несжимаемой (сплошная линия) и сжимаемой (символы ●) жидкости с амплитудой радиальных колебаний внешней границы равной  $A = 0.01$  мкм. Пунктирной линией обозначен случай неподвижной внешней границы

ENO-схеме, хорошо улавливает даже незначительные изменения отклонения, вызванные радиальным движением внешней поверхности.

## 5 Заключение

Разработана методика расчета сильного сжатия осесимметричного газового пузырька в жидкости методом прямого численного моделирования на основе уравнений динамики жидкости и газа. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных при решении задачи свободных колебаний полости в жидкости с использованием классической схемы Годунова и ее ENO-модификации. Выявлено, что наиболее оптимальным соотношением точности и экономичности среди рассмотренных схем обладает ENO-схема. На примере задачи динамики газовой полости в слое жидкости показано, что предлагаемая методика эффективно описывает не только сферическое и несферическое движение поверхности, но и их взаимное влияние друг на друга.

Авторы выражают благодарность К. Р. Закирову из ИМех УНЦ РАН за полезные обсуждения.

## Список литературы

- [1] Аганин А. А., Гусева Т. С. Изменение малого искажения сферической формы газового пузырька при его сильном расширении-сжатии // ПМТФ. 2005. № 4. С. 17–22.
- [2] Годунов С. К., Забродин А. В. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [3] Aganin A. A. Dynamics of a small bubble in a compressible fluid // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2000. V. 33. Pp. 157–174.
- [4] Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S. R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III // J. Comp. Phys. 1987. V. 71. Pp. 231–303.