



УДК 534.2; 532

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ МАЛЫХ ИСКАЖЕНИЙ СФЕРИЧНОСТИ КОЛЛАПСИРУЮЩЕГО ПУЗЫРЬКА¹

А. А. Аганин, Т. С. Гусева, Т. Ф. Халитова

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

Аннотация. Представлены результаты расчета эволюции малых осесимметричных искажений сферической формы пузырька в ходе его коллапса. Используются полная модель на основе двумерных уравнений газовой динамики (газ и жидкость считаются невязкими нетеплопроводными) и ряд упрощенных моделей. Последние получены из полной модели путем расщепления движения газа и жидкости на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение. Различия упрощенных моделей определяются допущениями, используемыми при реализации расщепления.

Ключевые слова: несферическое сжатие пузырька, уравнения газовой динамики

1 Введение

Во многих практических задачах с использованием жидкостей с пузырьками существенное значение имеет форма пузырьков. Так, сохранение сферичности пузырьков является одним из основных условий в известных экспериментах по однопузырьковой сонолюминесценции [1] и акустической кавитации дейтерированного ацетона [2]. Эволюция возмущения сферичности пузырька, как правило, описывается на основе расщепления движения газа и жидкости на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение [3–5]. При этом сферическая составляющая описывается одномерными уравнениями газовой динамики, а эволюция возмуще-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00415-а) и в рамках программы ОЭММПУ РАН

ния — обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с коэффициентами — функциями параметров сферического движения. Решение задачи при таком подходе значительно проще, чем при интегрировании двумерных уравнений газовой динамики. Но в случае, когда стенки пузырька сходятся со сверхзвуковой скоростью, некоторые упрощающие предположения, используемые обычно в рамках этого подхода, оказываются неверными. В настоящей работе для такого случая проводится сравнение результатов применения трех моделей эволюции искажения, полученных с использованием расщепления, и результатов прямого численного моделирования (ПЧМ) на основе двумерных уравнений газовой динамики.

2 Постановка задачи

Рассматривается сильное сжатие пузырька в жидкости. Пузырек полагается осесимметричным с искажением формы в виде квадрупольной сферической гармоники. Движение газа и жидкости описывается двумерными уравнениями газовой динамики с уравнениями состояния из [6] для жидкости и из [7] для газа. При построении методики расчета применяются смешанные эйлерово-лагранжевы (СЭЛ) координаты. Уравнения газовой динамики в СЭЛ координатах (ξ, η) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\tau + \mathbf{F}_\xi + \mathbf{G}_\eta = \mathbf{S}, \quad \mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T, \\ \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho(U - U_w) \\ \rho u(U - U_w) + p\xi_x \\ \rho v(U - U_w) + px^{-\beta}\xi_y \\ \rho E(U - U_w) + pU \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho(V - V_w) \\ \rho u(V - V_w) + p\eta_x \\ \rho v(V - V_w) + px^{-\beta}\eta_y \\ \rho E(V - V_w) + pV \end{pmatrix}, \\ \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha p}{x} + \beta \left[\rho v \left(\frac{v}{x} - y_\tau \right) \right] \\ \beta \left[-\frac{\rho}{x} (uv - uxy_\tau - vx_\tau) + \frac{p}{x} \operatorname{ctg} y \right] \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{Q} = \sqrt{|h|}\mathbf{q}$, $\mathbf{F} = \sqrt{|h|}\mathbf{f}$, $\mathbf{G} = \sqrt{|h|}\mathbf{g}$, $\mathbf{S} = \sqrt{|h|}\mathbf{s}$; ρ — плотность; x, y — эйлеровы координаты; u, v — компоненты вектора скорости частицы среды; u_w, v_w — компоненты вектора скорости СЭЛ координат; p — давление; ε — удельная внутренняя энергия; $E = \varepsilon + (u^2 + v^2)/2$, $U = u\xi_x + \frac{v}{x^\beta}\xi_y$, $V = u\eta_x + \frac{v}{x^\beta}\eta_y$, $U_w = u_w\xi_x + \frac{v_w}{x^\beta}\xi_y$, $V_w = u_w\eta_x + \frac{v_w}{x^\beta}\eta_y$, $u_w = x_\tau$, $v_w = y_\tau x^\beta$, $\sqrt{|h|} = J\sqrt{|g|}$, $|g| = x^{2\alpha} \sin^{2\beta} y$, $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$, $\beta = \alpha(\alpha - 1)/2$, $\alpha = 2$ для сферической системы координат. Задача рассматривается без учета вязкости и теплопроводности газа и жидкости, межфазных процессов и

поверхностного натяжения. При этом граничные условия имеют вид:

$$U^{o+} = U^{o-}, \quad p^+ = p^- \quad (U^o = U/\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 x^{-2\beta}}). \quad (2)$$

Уравнение поверхности пузырька в начальный момент $t = 0$ задается следующим образом

$$r = R_0 + a_{i0}P_2(\theta),$$

где R_0, a_{i0} — начальные значения радиуса пузырька $R(t)$ и отклонения от сферичности $a_i(t)$. При $t = 0$ полагается: $R = 1$ мм, $\dot{R} = 0$, $\dot{a}_i = \dot{a}_{i0}$; $T(r, 0) = 50$ К, $p(r, 0) = p(R, 0)$ при $0 \leq r \leq R$ и $T(r, 0) = T_l(r, 0) = 273$ К, $\rho(r, 0) = \rho_0 = 923,4$ кг/м³, $p(R, 0) = p_s(T_l(r, 0))$ — давление насыщения, $p_\infty = 15$ атм при $R \leq r \leq \infty$; $i = 2$, $P_2(\theta) = 0.25(3 \cos 2\theta + 1)$.

3 Упрощенные математические модели

В [3] путем расщепления движения газа и жидкости на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение получено уравнение эволюции отклонения от сферической формы пузырька a_i , которое в условиях настоящей работы имеет вид:

$$\ddot{a}_i + \frac{3\dot{R}_i^*}{R} \dot{a}_i - (i-1) \frac{\ddot{R}_i^*}{R} a_i = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_i^* &= \frac{\dot{R}}{3} - \frac{R(u_r^+ + q_i u_r^-)}{3(1+q_i)}, \\ \ddot{R}_i^* &= \frac{(i+1)(p_r^- - p_r^+)}{\rho_0(i-1)(1+q_i)} + \frac{\dot{R}u_r^+ + R\dot{u}_r^+}{(i-1)(1+q_i)} + \frac{q_i(\dot{R}u_r^+ + R\dot{u}_r^+)}{(i-1)(1+q_i)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $q_i = (i+1)\bar{\rho}/(i\rho_0)$, $\bar{\rho}$ — среднее значение плотности в пузырьке. Эффекты сферического движения в (3), (4) учтены посредством R и \dot{R} , градиентов давления p_r^\pm и скорости u_r^\pm (и их производных по времени \dot{u}_r^\pm) газа и жидкости на границе пузырька. При выводе (3), (4) предполагается, что в газе и жидкости $\rho_r = 0$.

Если градиенты в (4) определять упрощенно, в предположении отсутствия ударных волн в газе и жидкости, то параметры \dot{R}_i^* и \ddot{R}_i^* можно представить в виде [4]

$$\dot{R}_i^* = \dot{R}/(1+q_i), \quad \ddot{R}_i^* = (1-q_i)\ddot{R}/(1+q_i). \quad (5)$$

Считая, кроме того, плотность газа пренебрежимо малой по сравнению с плотностью жидкости ($q_i = 0$), а сжатие газа однородным, можно прийти к широко используемому в литературе уравнению [5], где

$$\dot{R}_i^* = \dot{R}, \quad \ddot{R}_i^* = \ddot{R}. \quad (6)$$

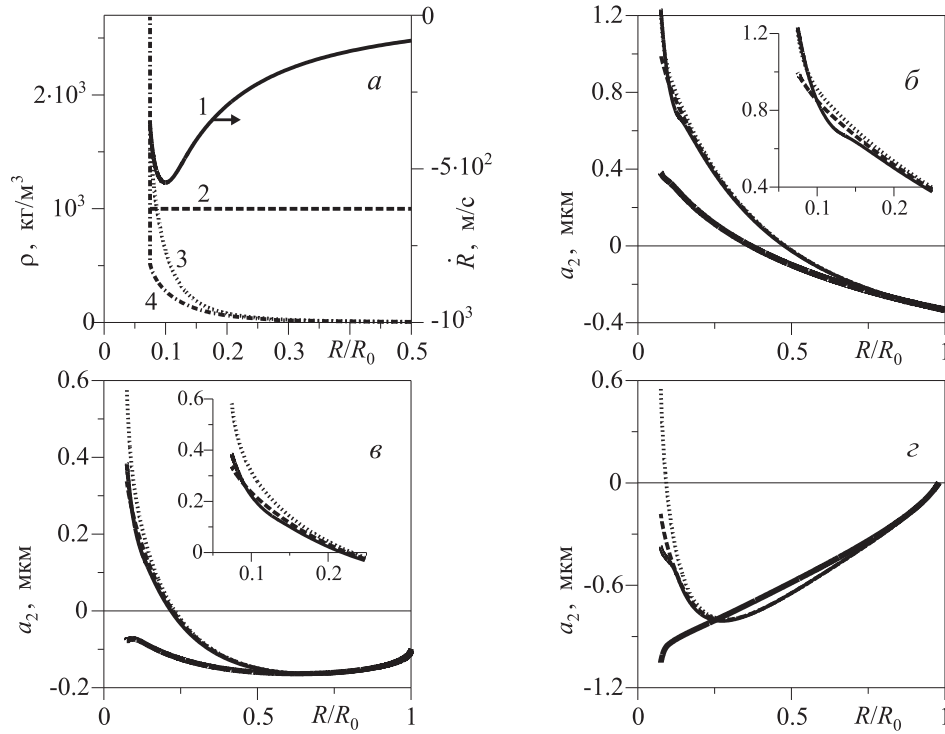


Рис. 1. (а): кривая 1 — скорость сжатия, 2 — невозмущенная плотность жидкости, 3 — осредненная плотность газа, 4 — плотность газа около центра пузырька; (б–г): отклонение от сферической формы при $t_* = 0$, $a_{20} = -1/3$ мкм, $\dot{a}_{20} = 0$, t_* — момент возникновения возмущения (б); $t_* = 0$, $a_{20} = -0.1$ мкм, $\dot{a}_{20} = -0.005$ м/с (в); $t_* = 5$ мкс, $a_{20} = 0$, $\dot{a}_{20} = -0.025$ м/с (г). Сплошные кривые — ПЧМ, тонкие сплошные — УМ1, штриховые — УМ2, пунктирные — УМ3

Входящие в (3)–(6) параметры сферического движения определяются из решения задачи (1), (2) в сферически симметричной постановке.

В дальнейшем модель [3] (уравнения (3), (4)) будем называть моделью УМ1, модель [4] ((3), (5)) — УМ2, модель [5] ((3), (6)) — УМ3.

4 Результаты расчетов

Рассматривается сильное сжатие пузырька, такое, что в конце плотность газа превышает плотность жидкости (кривые 3 и 2 на Рис. 1(а)). В ходе сжатия в пузырьке формируется ударная волна. Ее фокусировка в центре пузырька (коллапс пузырька) отражена финальным скачком кривой 4.

Рассчитаны три варианта возникновения малого начального возмуще-

ния сферической формы пузырька. Результаты расчетов приведены на Рис. 1(б)–(г). В совокупности они отражают характерные особенности развития малого возмущения. Кривые всех упрощенных моделей совпадают почти до момента коллапса. Различия проявляются, когда сжатие газа в пузырьке становится существенно неоднородным, а плотность газа — сравнимой с плотностью жидкости ($R/R_0 \approx 0.15$).

Модель УМ3 без учета плотности газа в конце стадии сжатия прогнозирует ускоренный рост амплитуды отклонения от сферичности. На стадии замедленного сжатия это принято связывать с проявлением неустойчивости Рэлея-Тейлора. Модель УМ2, учитывающая изменение плотности газа и приближенно — неоднородность сжатия, показывает менее интенсивное нарастание отклонения там, где плотность газа уже сравнима с плотностью жидкости. В интервале $\ddot{R} > 0, \bar{\rho} > \rho_0$ она дает не ускоренный, а замедленный рост возмущения в связи с тем, что плотность газа становится выше плотности жидкости, и механизм, лежащий в основе неустойчивости Рэлея-Тейлора, оказывает стабилизирующее воздействие на поверхность раздела сред.

Более полный учет информации о сферической составляющей движения (в частности, о распределении давления в пузырьке) в модели УМ1 приводит на стадии сжатия сначала к повышению устойчивости формы пузырька, а затем к ее заметному снижению. Несмотря на то, что в (3), (4) явно не входит радиальное ускорение (механизм неустойчивости Рэлея-Тейлора явно не выделяется), на стадии замедленного сжатия модель УМ1, как и УМ2, прогнозирует повышение устойчивости формы пузырька. При этом кривые, полученные с использованием УМ1, характеризуются наличием в заключительной стадии сжатия довольно резких изменений скорости развития возмущения, которых не наблюдается для других упрощенных моделей.

Результаты ПЧМ в начале сжатия (до $R/R_0 \approx 0.6$) очень близки к результатам упрощенных моделей. По мере роста \dot{R} , \dot{a}_2 расхождение в области монотонного изменения отклонения монотонно увеличивается. В конце сжатия в результатах ПЧМ также, как и для модели УМ1, наблюдается довольно резкое изменение скорости развития возмущения. К моменту коллапса различие амплитуды возмущения для упрощенных моделей и ПЧМ может составлять до 8 раз.

5 Заключение

Представлено сравнение результатов моделирования несферического коллапса осесимметричного пузырька в жидкости с использованием упрощенных моделей работ [3–5] и на основе прямого численного моделирования

с использованием двумерных уравнений газовой динамики. Установлено, что различия в изменении отклонения по упрощенным моделям на большей части стадии сжатия (до $R/R_0 \approx 0.15$) и по всем моделям на начальном отрезке сжатия (до $R/R_0 \approx 0.6$) незначительны.

В области монотонного изменения отклонения различия между результатами применения упрощенных моделей и ПЧМ монотонно нарастают. При этом скорость изменения отклонения при ПЧМ оказывается меньше.

В финале стадии сжатия для упрощенной модели с более точными значениями градиентов давления и скорости на поверхности пузырька и для ПЧМ характерны резкие изменения скорости развития отклонения.

Различия между результатами ПЧМ и упрощенных моделей можно объяснить тем, что в последних не учитывается изменение плотностей жидкости и газа, обусловленное несферической составляющей движения.

Список литературы

- [1] Brenner M. P., Hilgenfeldt S., Lohse D. Single-bubble sonoluminescence // *Rev. Mod. Phys.* 2002. V. 74. Pp. 425–484.
- [2] Taleyarkhan R. P. et. al. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science*. 2002. V. 295. Pp. 1868–1873.
- [3] Аганин А. А., Гусева Т. С. Эволюция возмущений сферичности пузырька газа в жидкости при сильном сжатии // *Актуальные проблемы механики сплошной среды*. Казань: КГУ. 2006. С. 83–103.
- [4] Lin H., Storey B. D. and Szeri A. J. Inertially driven inhomogeneities in violently collapsing bubbles: the validity of the Rayleigh-Plesset equation // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 452. Pp. 145–162.
- [5] Plesset M. S., Mitchell T. P. On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid // *Quart. Appl. Math.* 1956. V. 8, № 4. Pp. 419–430.
- [6] Nigmatulin R.I et. al. Theory of supercompression of vapor bubbles and nanoscale thermonuclear fusion // *Physics of Fluid*. 2005. V. 17. P. 107106 (31 pages).
- [7] Moss W. C., Clarke D. B., White J. W. et. al. Hydrodynamic simulations of bubble collapse and picosecond sonoluminescence // *Phys. Fluids*. 1994. V. 6, № 9. P. 2979–2985.