



УДК 532.546; 533.15

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ¹

А. А. Аганин, А. И. Давлетшин, В. Г. Малахов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Казань

Аннотация. Предлагается математическая модель взаимодействия двух сферических газовых пузырьков в жидкости. Данная модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков и пространственного положения их центров. Она отличается от известных в литературе аналогов тем, что допускает значительно меньшие расстояния между взаимодействующими пузырьками.

Ключевые слова: уравнения динамики жидкости, взаимодействие пузырьков, потенциальное движение

1 Введение

К настоящему времени довольно хорошо изучена динамика отдельного газового пузырька в жидкости [1]. Полученные в этом отношении результаты имеют важное теоретическое и прикладное значение. Однако в реальных жидкостях, как правило, присутствует не один, а множество пузырьков, и свойства жидкостей существенно зависят от характера взаимодействия между пузырьками. В силу большей сложности этот вопрос является менее изученным [2].

В настоящей работе рассматривается взаимодействие двух пузырьков. Важной характеристикой процесса взаимодействия пузырьков является

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00145) и в рамках программы ОЭММПУ РАН

отношение $\xi = (R_i + R_j)/d < 1$, где R_i, R_j — радиусы i -го и j -го пузырьков, соответственно; d — расстояние между центрами пузырьков. Используемые в литературе модели имеют, как правило, третий или четвертый порядок точности относительно ξ [2–4]. При решении ряда задач, особенно с близким расположением пузырьков друг к другу, этого может оказаться недостаточно. В настоящей работе предлагается математическая модель, в которой порядок точности относительно указанного параметра ξ может быть произвольным. Это означает, что предлагаемая модель позволяет изучать взаимодействие пузырьков, расположенных значительно ближе, чем это можно делать с помощью моделей, предложенных в [2–4].

2 Постановка задачи

Движение жидкости считается потенциальным, пузырьки — сферическими. Уравнения динамики жидкости в терминах потенциала скорости Φ имеют вид:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p - p_\infty}{\rho_0} = 0. \quad (2)$$

Здесь t — время; p — давление; ρ_0 — плотность; p_∞ — давление на бесконечном удалении от пузырьков, изменяющееся по закону:

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t,$$

где p_0 — статическое давление; Δp — амплитуда; ω — частота колебаний.

Уравнение поверхности пузырьков имеет вид:

$$F_k(x, y, z, t) = 0,$$

где $k = i, j$, (x, y, z) — декартовы координаты. Центры пузырьков расположены на оси z так, что $z_i - z_j = d$. На поверхности каждого из пузырьков ставятся кинематические и динамические (по нормали) граничные условия. В терминах потенциала скорости они имеют вид:

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla F_k = 0, \quad (3)$$

$$p_k^+ = p_k^- + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2\sigma}{R_k}, \quad (4)$$

где знаки \pm указывают на отношение к внешней (+) и внутренней (–) сторонам поверхности; μ — динамический коэффициент вязкости, \mathbf{n}_k — вектор внешней нормали; $2H_k$ — средняя кривизна поверхности пузырька;

σ — коэффициент поверхностного натяжения. В силу предположения о потенциальности движения жидкости динамическое граничное условие по касательной в постановке задачи не используется. Такой подход является одним из используемых в литературе способов учета влияния вязкости [5].

Газ в пузырьках принимается с однородным распределением давления, изменяющимся по закону

$$p_k^- = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_{0k}} \right) \left(\frac{R_{0k}}{R_k} \right)^{3\kappa}, \quad (5)$$

где R_{0k} , R_k — начальный и текущий радиусы пузырьков; κ — показатель адиабаты.

3 Математическая модель

При построении математической модели наряду с глобальной неподвижной системой отсчета (x, y, z) используются две локальные подвижные. В качестве подвижных применяются сферические координаты $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$ с началом отсчета в центре соответствующего пузырька. Имеет место следующая связь

$$x = x(r_k, \theta_k, \varphi_k, \tau), \quad y = y(r_k, \theta_k, \varphi_k, \tau), \quad z = z(r_k, \theta_k, \varphi_k, \tau),$$

где τ — время в подвижной системе координат.

В подвижных координатах уравнение движения в (2) и кинематическое граничное условие (3) принимают вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \mathbf{w}_k \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p^+ - p_\infty}{\rho_0} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial \tau} - \mathbf{w}_k \cdot \nabla F_k + \nabla \Phi \cdot \nabla F_k = 0, \quad (7)$$

где $\mathbf{w}_k = w_k \cdot \mathbf{k}$; $w_k = \dot{z}_k$ — скорость движения подвижной системы координат; \mathbf{k} — единичный вектор оси z ; z_k — координата центра k -го пузырька. Здесь и далее верхней точкой обозначается производная по τ .

Потенциал скорости жидкости принимается в следующем виде:

$$\Phi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma i}(\tau) P_{\gamma i}(\cos \theta_i)}{r_i^{\gamma+1}} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma j}(\tau) P_{\gamma j}(\cos \theta_j)}{r_j^{\gamma+1}}, \quad (8)$$

где $P_\gamma(\eta)$ — полином Лежандра степени γ , $\eta = \cos \theta_k$.

Уравнение поверхности каждого пузырька в его локальной сферической системе координат $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$ можно записать в виде:

$$F_k(r_k, \tau) = r_k - R_k(\tau) = 0. \quad (9)$$

Подставляя выражения для потенциала Φ из (8) и поверхности $F_k(r_k, \tau)$ из (9) в кинематическое условие (7) и учитывая ортогональность полиномов Лежандра, получаем следующие выражения для коэффициентов потенциала скорости

$$\begin{aligned} B_{0i} &= -\dot{R}_i R_i^2, & B_{0j} &= -\dot{R}_j R_j^2, \\ B_{1i} &= -\frac{R_i^3 z_i}{2} + \frac{B_{\gamma j} R_i^3}{2d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1}, & B_{1j} &= -\frac{R_j^3 z_j}{2} + (-1)^{\gamma+1} \frac{B_{\gamma i} R_j^3}{2d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1}, \\ B_{ni} &= \frac{n}{(n+1)} \frac{B_{\gamma j} R_i^{2n+1}}{d^{\gamma+n+1}} C_{\gamma n}, & B_{nj} &= (-1)^{\gamma+n} \frac{n}{(n+1)} \frac{B_{\gamma i} R_j^{2n+1}}{d^{\gamma+n+1}} C_{\gamma n}, \\ & & n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь и далее по повторяющимся греческим индексам предполагается суммирование от 0 до ∞ .

Система уравнений для радиусов пузырьков и положений их центров получается из динамического условия (4). Для этого нужно выразить давление p_k^+ из (6), подставить его в (4). Затем в полученном выражении следует заменить Φ согласно (8) и $F_k(r_k, \tau)$ согласно (9), после чего с учетом ортогональности полиномов Лежандра будем иметь систему следующих обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} R_i \ddot{R}_i + 2\dot{R}_i^2 + \frac{B_{\gamma i}^2}{2R_i^{2\gamma+4}} C_{\gamma 1} - \frac{\dot{B}_{\gamma j}}{d^{\gamma+1}} + \frac{B_{\gamma j} \dot{z}_j}{d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1} - \\ - \frac{B_{\gamma j} B_{\sigma j} R_i^{2\varsigma-2}}{2d^{\gamma+\sigma+2\varsigma+2}} \varsigma C_{\gamma \varsigma} C_{\sigma \varsigma} = \frac{p_i^- - p_\infty}{\rho_0} + \frac{4\nu B_{0i}}{R_i^3} - \frac{2\sigma}{\rho_0 R_i}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} R_i \ddot{z}_i + 5\dot{R}_i \dot{z}_i - \frac{B_{\gamma i} B_{\sigma i}}{R_i^{\gamma+\sigma+4}} [(\gamma+1)(\sigma+1) \alpha_{\gamma\sigma 1} + \beta_{\gamma\sigma 1}] - \\ - \frac{3\dot{B}_{\gamma j} R_i + 3B_{\gamma j} \dot{R}_i}{d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1} - \frac{2B_{\gamma j} R_i (\dot{z}_i - 3\dot{z}_j)}{d^{\gamma+3}} C_{\gamma 2} + \\ + \frac{2B_{\gamma i} B_{\sigma j}}{R_i^{\gamma-\varsigma+3} d^{\sigma+\varsigma+1}} C_{\sigma \varsigma} [\varsigma(\gamma+1) \alpha_{\gamma\varsigma 1} - \beta_{\gamma\varsigma 1}] - \\ - \frac{B_{\gamma j} B_{\sigma j} R_i^{\varsigma+\vartheta-2}}{d^{\gamma+\sigma+\varsigma+\vartheta+2}} C_{\gamma \varsigma} C_{\sigma \vartheta} (\varsigma\vartheta \alpha_{\varsigma\vartheta 1} + \beta_{\varsigma\vartheta 1}) = \frac{24\nu B_{1i}}{R_i^4}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} R_j \ddot{R}_j + 2\dot{R}_j^2 + \frac{B_{\gamma j}^2}{2R_j^{2\gamma+4}} C_{\gamma 1} - (-1)^\gamma \frac{\dot{B}_{\gamma i}}{d^{\gamma+1}} - (-1)^\gamma \frac{B_{\gamma i} \dot{z}_i}{d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1} - \\ - (-1)^{\gamma+\sigma} \frac{B_{\sigma i} B_{\gamma i} R_j^{2\varsigma-2}}{2d^{\gamma+\sigma+2\varsigma+2}} \varsigma C_{\gamma \varsigma} C_{\sigma \varsigma} = \frac{p_j^- - p_\infty}{\rho_0} + \frac{4\nu B_{0j}}{R_j^3} - \frac{2\sigma}{\rho_0 R_j}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& R_j \ddot{z}_j + 5\dot{R}_j \dot{z}_j - \frac{B_{\gamma j} B_{\sigma j}}{R_j^{\gamma+\sigma+4}} [(\gamma+1)(\sigma+1)\alpha_{\gamma\sigma 1} + \beta_{\gamma\sigma 1}] + \\
& + (-1)^\gamma \frac{3\dot{B}_{\gamma i} R_j + 3B_{\gamma i} \dot{R}_j}{d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1} + (-1)^\gamma \frac{2B_{\gamma i} R_j (3\dot{z}_i - \dot{z}_j)}{d^{\gamma+3}} C_{\gamma 2} + \\
& + (-1)^{\sigma+\varsigma} \frac{2B_{\gamma j} B_{\sigma i}}{R_j^{\gamma-\varsigma+3} d^{\sigma+\varsigma+1}} C_{\sigma\varsigma} [\varsigma(\gamma+1)\alpha_{\gamma\varsigma 1} - \beta_{\gamma\varsigma 1}] - \\
& - (-1)^{\gamma+\sigma+\varsigma+\vartheta} \frac{B_{\gamma i} B_{\sigma i} R_j^{\varsigma+\vartheta-2}}{d^{\gamma+\sigma+\varsigma+\vartheta+2}} C_{\gamma\varsigma} C_{\sigma\vartheta} (\varsigma\vartheta\alpha_{\varsigma\vartheta 1} + \beta_{\varsigma\vartheta 1}) = \frac{24\nu B_{1j}}{R_j^4},
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_{\gamma\sigma\varsigma} &= \frac{2\varsigma+1}{2} \int_{-1}^1 P_\gamma(\eta) P_\sigma(\eta) P_\varsigma(\eta) d\eta, \\
\beta_{\gamma\sigma\varsigma} &= \frac{2\varsigma+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P'_\gamma(\eta) P'_\sigma(\eta) P_\varsigma(\eta) d\eta.
\end{aligned}$$

Система (10)–(13) решается методом Дормана-Принса восьмого порядка точности, при следующих начальных условиях

$$R_k(0) = R_{k0}, \quad \dot{R}_k(0) = v_{k0}, \quad z_k(0) = z_{k0}, \quad \dot{z}_k(0) = w_{k0}.$$

4 Иллюстрация применения

Для верификации программной реализации предлагаемой модели было проведено сравнение с результатами работы [3]. На Рис. 1 приведено из-

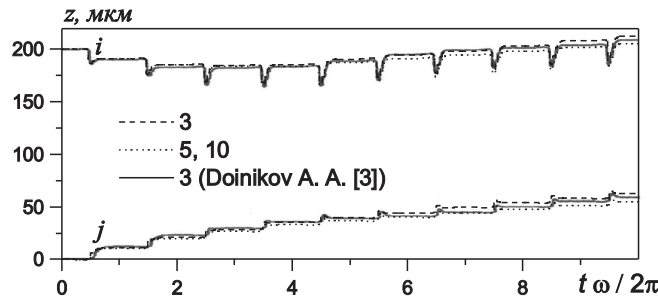


Рис. 1. Временные зависимости z -координаты центров пузырьков. Цифрами указан порядок точности используемой модели относительно $\xi = (R_i + R_j)/d < 1$

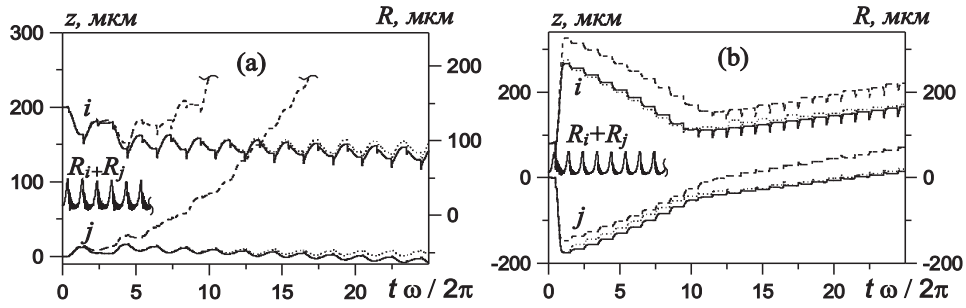


Рис. 2. Временные зависимости z -координаты центров и суммы радиусов пузырьков без учета (а) и с учетом (б) вязкости жидкости. Штриховые линии — третий порядок точности, пунктирные — пятый, сплошные — десятый и пятнадцатый

менение z -координаты центров пузырьков, рассчитанное при помощи модели настоящей работы, и взятое из Рис. 3(а) работы [3]. Решения получены при следующих входных данных: $p_0 = 1$ бар, $\rho_0 = 998$ кг/м³, $\omega/2\pi = 20$ кГц, $\kappa = 1.4$, $\sigma = 0.0725$ Н/м, $\mu = 10^{-3}$ кг/(м с), $\Delta p = 1.2$ бар, $R_{i0} = 5$ мкм, $R_{j0} = 7$ мкм, $z_{i0} = 200$ мкм, $z_{j0} = 0$ ($d_0 = 200$ мкм), $v_{i0} = v_{j0} = w_{i0} = w_{j0} = 0$. Как видно, результаты, полученные с помощью модели настоящей работы 3-го порядка точности и модели работы [3] также 3-го порядка, с течением времени начинают расходиться. Со временем это расхождение, будучи сначала незначительным, постепенно возрастает. Такое расхождение объясняется тем, что математическая модель 3-го порядка точности настоящей работы не является полностью идентичной математической модели работы [3]. Она совпадает с ней лишь по порядку точности. Это означает, что результаты применения этих двух моделей будут близкими лишь тогда, когда слагаемые более высокого порядка малости, отброшенные в разложениях при получении этих моделей, будут несущественными. В данной же задаче влияние с течением времени оказывается не очень малым, о чем свидетельствует расхождение решений, полученных с применением моделей настоящей работы 3-го и 5-го порядков точности. На начальном же отрезке времени, где влияние указанных слагаемых мало, решения с применением всех представленных на рисунке моделей совпадают. Поэтому можно заключить, что программная реализация предлагаемой модели выполнена правильно.

Необходимость использования моделей выше 5-го порядка точности относительно $\xi = (R_i + R_j)/d < 1$ иллюстрируется на Рис. 2. Входные данные задач, представленных на этом рисунке, следующие: Рис. 2(а) — $\mu = 0$, $\Delta p = 1.153$ бар; Рис. 2(б) — $z_{i0} = 80$ мкм ($d_0 = 80$ мкм). Значения других параметров те же, что и в задаче, приведенной на Рис. 1. Из Рис. 2 видно,

что для достижения сходимости численного решения пятого порядка точности оказывается недостаточно как в первом случае без учета вязкости жидкости, так и во втором случае с ее учетом.

5 Заключение

Построена математическая модель взаимодействия двух сферических газовых пузырьков в жидкости. От известных в литературе аналогов она отличается тем, что позволяет рассчитывать динамику пузырьков, более близко расположенных друг к другу. Это достигается за счет того, что теоретически она имеет неограниченный порядок точности относительно малого параметра $\xi = (R_i + R_j)/d < 1$, где R_i, R_j — радиусы пузырьков, d — расстояние между их центрами, в то время как порядок точности известных в литературе аналогов, как правило, не превышает четвертый. Приведены примеры численных расчетов. Показано, что при достаточно близком расположении пузырьков для получения результатов, соответствующих исходной постановке задачи в рамках уравнений динамики жидкости, надо применять модели с более высоким порядком точности, чем это делается в [2–4].

Список литературы

- [1] Аганин А. А., Ильгамов М. А. Динамика пузырька газа в жидкости с немалыми искажениями сферической формы // В сб. Динамика газовых пузырьков и аэрозолей. Казань: Казанский государственный университет. 2003. С. 7–22.
- [2] Коновалова С. И. Трансляционные эффекты и структурообразование при акустической кавитации // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Уфа, 2006.
- [3] Doinikov A. A. Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // Phys. Rev. E. 2001. V.64.
- [4] Harkin A., Kaper T. J., Nadim A. Coupled pulsation and translation of two gas bubbles in a liquid // Fluid Mech. 2001. V.445. Pp. 377–411.
- [5] Gavriluk S. L., Teshukov V. M. Drag force acting on a bubble in a cloud of compressible spherical bubbles at large Reynolds numbers // Eur.J.Mech.B.Fluids. 2005. V. 24, № 4. P. 468–477.